

Unidad N° 8

ESTUDIO BIDIMENSIONAL DE TENSIONES EN PLANOS OBLICUOS

8.1. Objetivos

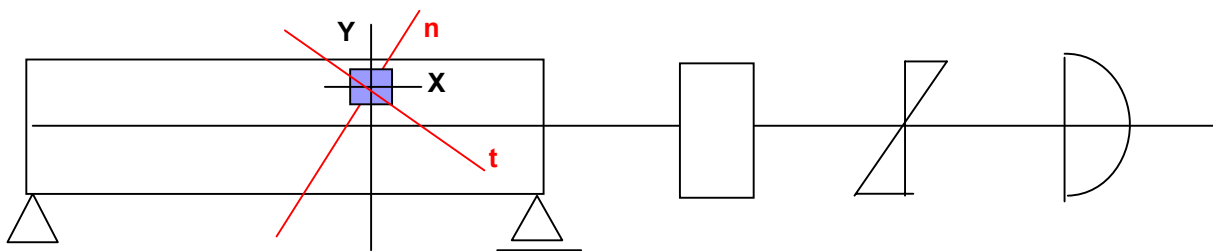
Al terminar el estudio de esta unidad usted deberá ser capaz de resolver los siguientes objetivos trazados para el Estudio bidimensional de tensiones en planos oblicuos.

1. Determinar analíticamente las tensiones normales y cortantes que actúan en las caras de un elemento diferencial orientado a un ángulo cualquiera (Plano oblicuo) respecto al eje de referencia x , aprender a dibujar dicho elemento diferencial.
2. Obtener los valores de tensiones de las tensiones Principales (tensiones máximas y mínimas normales), la ubicación del plano donde ocurren el estado tensional respecto al eje de referencia x , aprender a dibujar dicho elemento diferencial.
3. Obtener valores de tensiones de corte máximo y mínimo, sus respectivas tensiones normales, además el plano de ubicación donde ocurre el estado tensional respecto a un eje de referencia x , aprender a dibujar dicho elemento diferencial
4. Aprender un método gráfico – numérico (Círculo de Mohr) que de solución a lo planteado anteriormente en los objetivos 1, 2, 3.
5. Aprender a resolver problemas prácticos los distintos estados tensionales para cualquier elemento diferencial en estructuras sometidas a esfuerzos unidimensionales y bidimensionales.

8.2. Introducción

Si analizamos las unidades estudiadas anteriormente referido a los distintos estados tensionales que hemos venido calculando tanto en elementos sometidos a esfuerzos normales y cortantes simple, como esfuerzos ocasionados por la torsión y la flexión nos damos cuenta que siempre han estado referidos al eje principal de los elementos o un plano normal o paralelo a este eje, en esta unidad lo que pretendemos es analizar los estados tensionales que no necesariamente

sus planos sean paralelos o normales a los elementos, ya que al cambiar la orientación del plano, en este se darán nuevos valores tensionales que nos interesa conocerlos y analizarlos de tal manera de saber en que plano y que valores dan las tensiones máximas normales y cortantes, de tal forma de ser mas eficientes el momento de diseñar cualquier sección de un elemento estructural, por ejemplo veamos la viga de la Fig. 8.1, una vez conocido el estado tensional del elemento diferencial “ A “ respecto a los ejes ortogonales x, y que sabemos calcular, lo que se desea es encontrar es el estado tensional para los planos n, t girados en un ángulo Φ x-n.



para lograr este objetivo debemos deducir las ecuaciones de transformación que gobiernen las tensiones normales y de corte para cualquier plano oblicuo.

8.3. Solución numérica

Formulación de las ecuaciones

Sea la viga pared sometida a fuerzas externas como muestra la Fig. 8.2, consideremos un elemento diferencial cualquiera de la viga pared, donde conocemos sus esfuerzos respecto a los ejes x, y como muestra la Fig.8.3. El objetivo de este análisis es conseguir las ecuaciones de transformación que nos determinen los estados de esfuerzos respecto a los planos ortogonales n, t

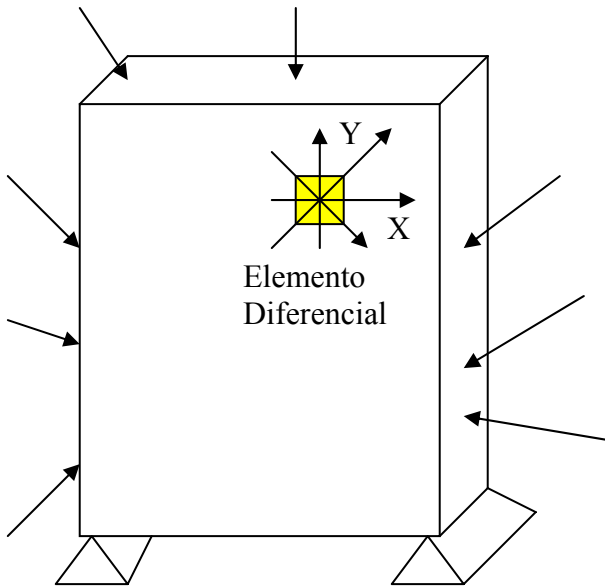


Fig.8.2
Viga Pared mostrando el Elemento diferencial

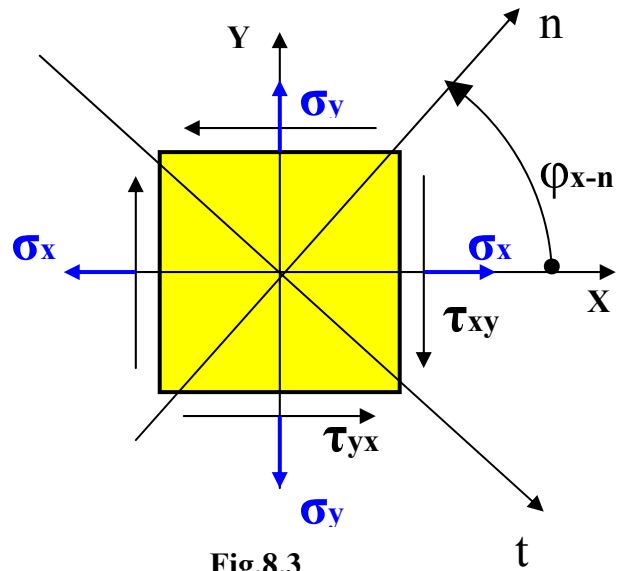


Fig.8.3
Elemento diferencial mostrando el Estado Tensional respecto a los planos (x, y)

Cortando el elemento diferencial por medio del plano t-t como muestra la Fig.8.4 vemos que automáticamente para mantener el equilibrio estático se generan tensiones respecto a los planos n, t

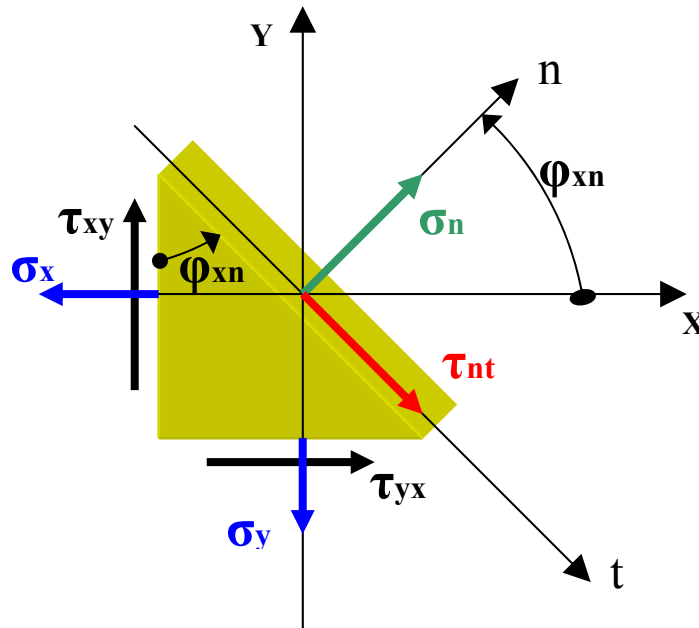


Fig.8.4
Elemento diferencial mostrando el estado tensional respecto a los planos (n, t)

Estableciendo ecuaciones de equilibrio de fuerzas en las direcciones de los ejes (n, t) obtenemos:

$$\sum \mathbf{F}_n = 0$$

$$\sigma_n (dA) - \sigma_x (dA) \cos(\varphi_{xn}) \cos(\varphi_{xn}) - \sigma_y (dA) \sin(\varphi_{xn}) \sin(\varphi_{xn}) + \tau_{xy} (dA) \cos(\varphi_{xn}) \sin(\varphi_{xn}) + \tau_{yx} (dA) \sin(\varphi_{xn}) \cos(\varphi_{xn}) = 0$$

simplificando y despejando σ_n tenemos:

$$\sigma_n = \sigma_x \cos^2(\varphi_{xn}) + \sigma_y \sin^2(\varphi_{xn}) - \tau_{xy} \cos(\varphi_{xn}) \sin(\varphi_{xn}) - \tau_{yx} \sin(\varphi_{xn}) \cos(\varphi_{xn}) \quad (8.1)$$

$$\sum \mathbf{F}_t = 0$$

$$\tau_{nt} (dA) - \sigma_x (dA) \cos(\varphi_{xn}) \sin(\varphi_{xn}) + \sigma_y (dA) \sin(\varphi_{xn}) \cos(\varphi_{xn}) - \tau_{xy} (dA) \cos(\varphi_{xn}) \cos(\varphi_{xn}) + \tau_{yx} (dA) \sin(\varphi_{xn}) \sin(\varphi_{xn}) = 0$$

simplificando y despejando tenemos:

$$\tau_{nt} = \sigma_x \cos(\varphi_{xn}) \sin(\varphi_{xn}) - \sigma_y \sin(\varphi_{xn}) \cos(\varphi_{xn}) - \tau_{xy} \cos^2(\varphi_{xn}) - \tau_{yx} \sin^2(\varphi_{xn}) \quad (8.2)$$

recordando de la unidad N° 6 la ecuación del equilibrio rotacional

$$|\tau_{xy}| = |\tau_{yx}|$$

Las siguientes Identidades Trigonométricas

$$\sin^2(\varphi_{xn}) = \frac{1 - \cos(2\varphi_{xn})}{2}$$

$$\cos^2(\varphi_{xn}) = \frac{1 + \cos(2\varphi_{xn})}{2}$$

$$2\sin(\varphi_{xn}) \cos(\varphi_{xn}) = \sin(2\varphi_{xn})$$

y reemplazando en las en las ecuaciones (8.1) y (8.2) se transforman en:

$$\sigma_n = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cos(2\varphi_{xn}) - \tau_{xy} \operatorname{Sen}(2\varphi_{xn})$$

$$\tau_{nt} = \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \operatorname{Sen}(2\varphi_{xn}) + \tau_{xy} \cos(2\varphi_{xn})$$
8.3

que son las ecuaciones que gobiernan los distintos estados tensionales cuya normal forma un ángulo (φ) con respecto al eje de referencia.

Aunque es posible obtener los valores máximos de los esfuerzos normales y cortantes, así como la orientación de los planos donde actúan derivando y igualando cero las ecuaciones (8.3), es más sencillo obtener estas expresiones a partir de un método gráfico – numérico conocido como el nombre de **circulo de Mohr**

8.4 Solución gráfico – numérica

8.4.1 Circulo de Mohr - Formulación

Este método consiste en poder obtener los valores de esfuerzos normales y cortantes para cualquier plano oblicuo de forma grafica, para ello nos valemos de un artificio extremadamente útil, conocido como el círculo de Mohr para esfuerzos. Se llama así en honor del ingeniero alemán Otto Mohr (1835 – 1918) quien lo invento en 1882.

Partiendo de las expresiones (8.3) es fácil demostrar que son ecuaciones paramétricas de un círculo. Para facilitar esta demostración hagamos:

$$C = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2}$$

$$D = \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}$$

quedando las ecuaciones (8.3) de la siguiente forma:

$$\sigma_n = C + D \cos(2\varphi_{xn}) - \tau_{xy} \operatorname{Sen}(2\varphi_{xn}) \quad (8.4)$$

$$\tau_{nt} = D \operatorname{Sen}(2\varphi_{xn}) + \tau_{xy} \cos(2\varphi_{xn}) \quad (8.5)$$

pasando él termino C al lado izquierdo y elevando al cuadrado las expresiones (8.4) y (8.5) obtenemos:

$$(\sigma_n - C)^2 = (D \cos(2\varphi_{xn}) - \tau_{xy} \operatorname{Sen}(2\varphi_{xn}))^2$$

$$(\tau_{nt})^2 = (D \operatorname{Sen}(2\varphi_{xn}) + \tau_{xy} \cos(2\varphi_{xn}))^2$$

resolviendo los cuadrados de los segundos términos y sumando las dos expresiones tenemos:

$$(\sigma_n - C)^2 = D^2 \cos^2(2\varphi_{xn}) - 2 D \cos(2\varphi_{xn}) \tau_{xy} \operatorname{Sen}(2\varphi_{xn}) + \tau_{xy}^2 \operatorname{Sen}^2(2\varphi_{xn})$$

$$(\tau_{nt} - 0)^2 = D^2 \operatorname{Sen}^2(2\varphi_{xn}) + 2 D \operatorname{Sen}(2\varphi_{xn}) \tau_{xy} \cos(2\varphi_{xn}) + \tau_{xy}^2 \cos^2(2\varphi_{xn})$$

$$(\sigma_n - C)^2 + (\tau_{nt} - 0)^2 = D^2(\cos^2(2\varphi_{xn}) + \operatorname{Sen}^2(2\varphi_{xn})) + \tau_{xy}^2(\operatorname{Sen}^2(2\varphi_{xn}) + \cos^2(2\varphi_{xn}))$$

aplicando la identidad trigonométrica siguiente:

$$\operatorname{Sen}^2(\theta) + \cos^2(\theta) = 1$$

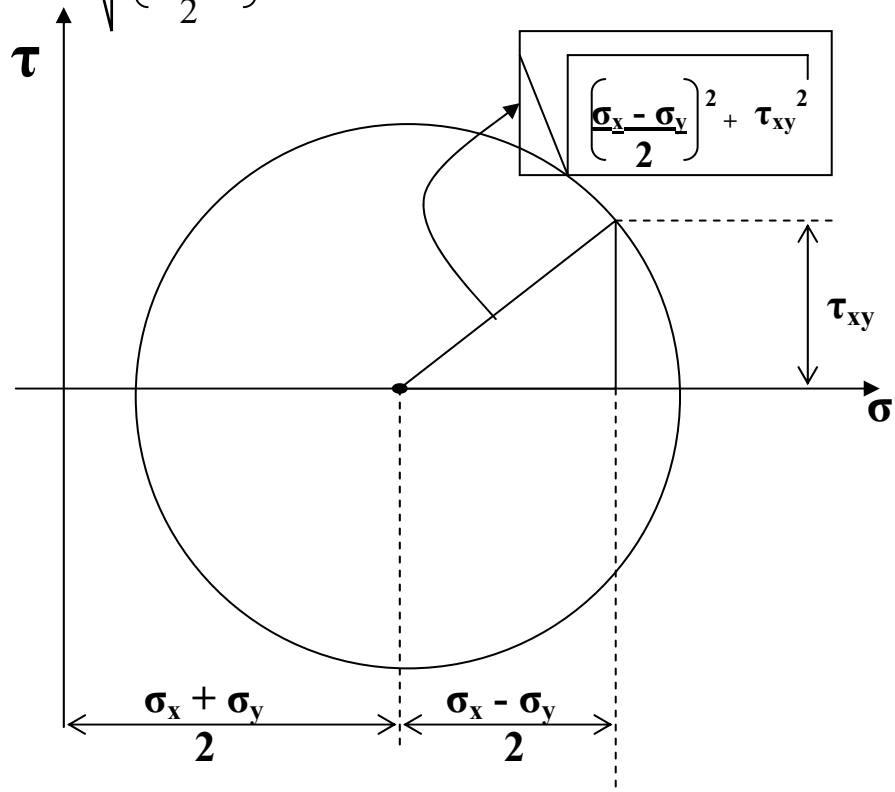
obtenemos:

$$(\sigma_n - C)^2 + (\tau_{nt} - 0)^2 = D^2 + \tau_{xy}^2 \quad (8.6)$$

la cual corresponde a la ecuación de un círculo referido a ejes σ_n y τ_{nt} , cuyo:

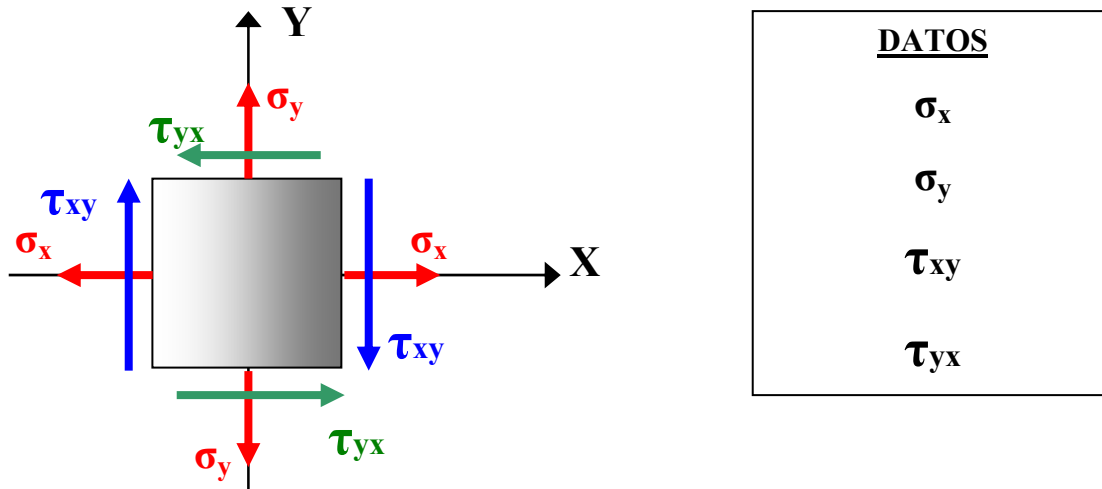
$$\text{Centro: } (C, 0) = \left(\frac{\sigma_x + \sigma_y}{2}, 0 \right)$$

$$\text{Radio: } R = \sqrt{D^2 + \tau_{xy}^2} = \sqrt{\left[\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \right]^2 + \tau_{xy}^2}$$



8.4.2 Forma practica de construcción del circulo de Mohr

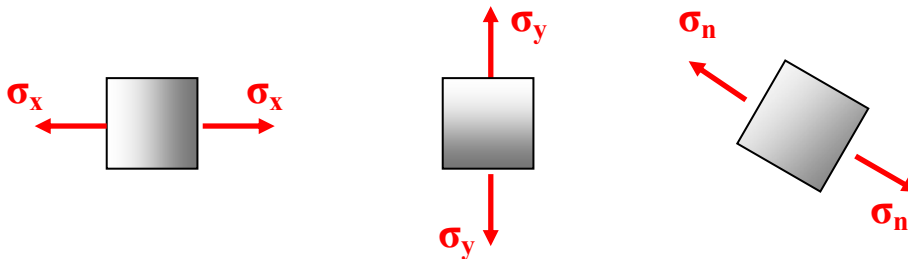
Sea el elemento diferencial sometido a esfuerzos normales y cortantes conocidos respecto a los ejes (X, Y) como muestra la Fig. 8.5



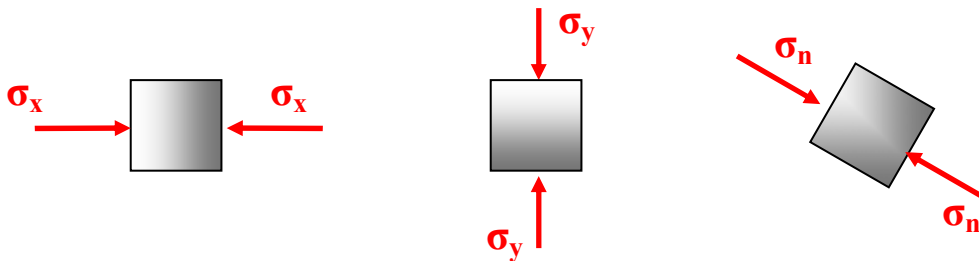
Lo que se pretende es presentar una forma practica de construcción del circulo para ello tenemos primeramente que ponernos de acuerdo en la simbología que se va utilizar y los pasos a seguir para la construcción del mismo.

a) Simbología

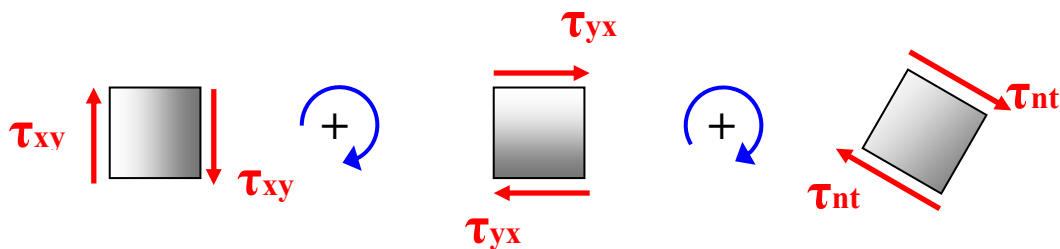
- Tensiones normales
 - Tracción (+) Salen las tensiones perpendicularmente a las caras del elemento diferencial, ejemplo:



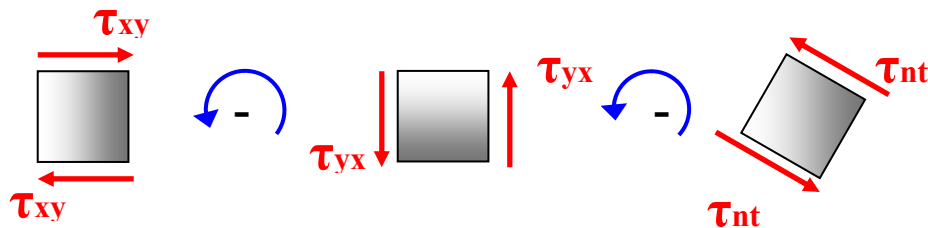
- Compresión (-) Entren las tensiones perpendicularmente a las caras del elemento diferencial, ejemplo:



- Tensiones de corte
 - Positivas (+) El par cortante cuyas tensiones son paralelas a las caras del elemento diferencial lo hacen **girar a favor de las agujas del reloj**, ejemplos:



- Negativas (-) El par cortante cuyas tensiones son paralelas a las caras del elemento diferencial lo hacen **girar en contra de las agujas del reloj**, ejemplos:

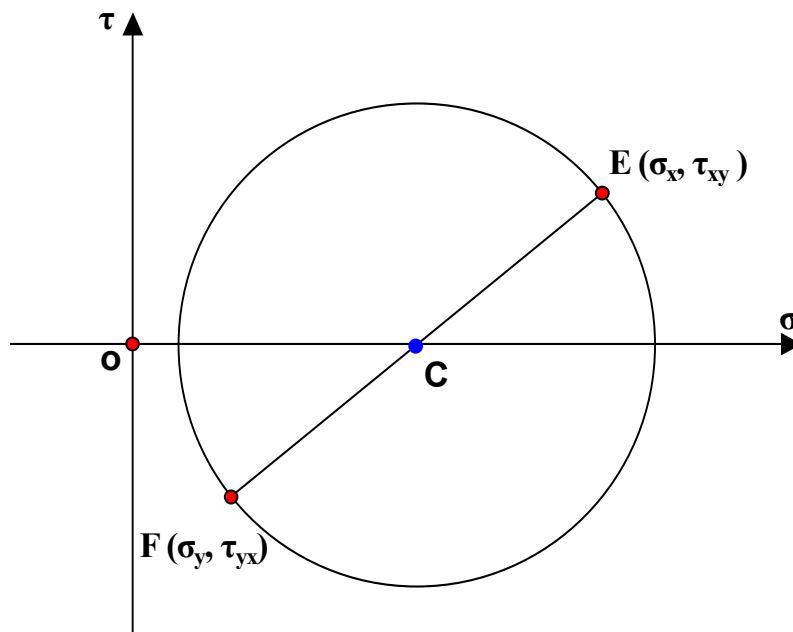


- Angulo de rotación del plano oblicuo (φ)

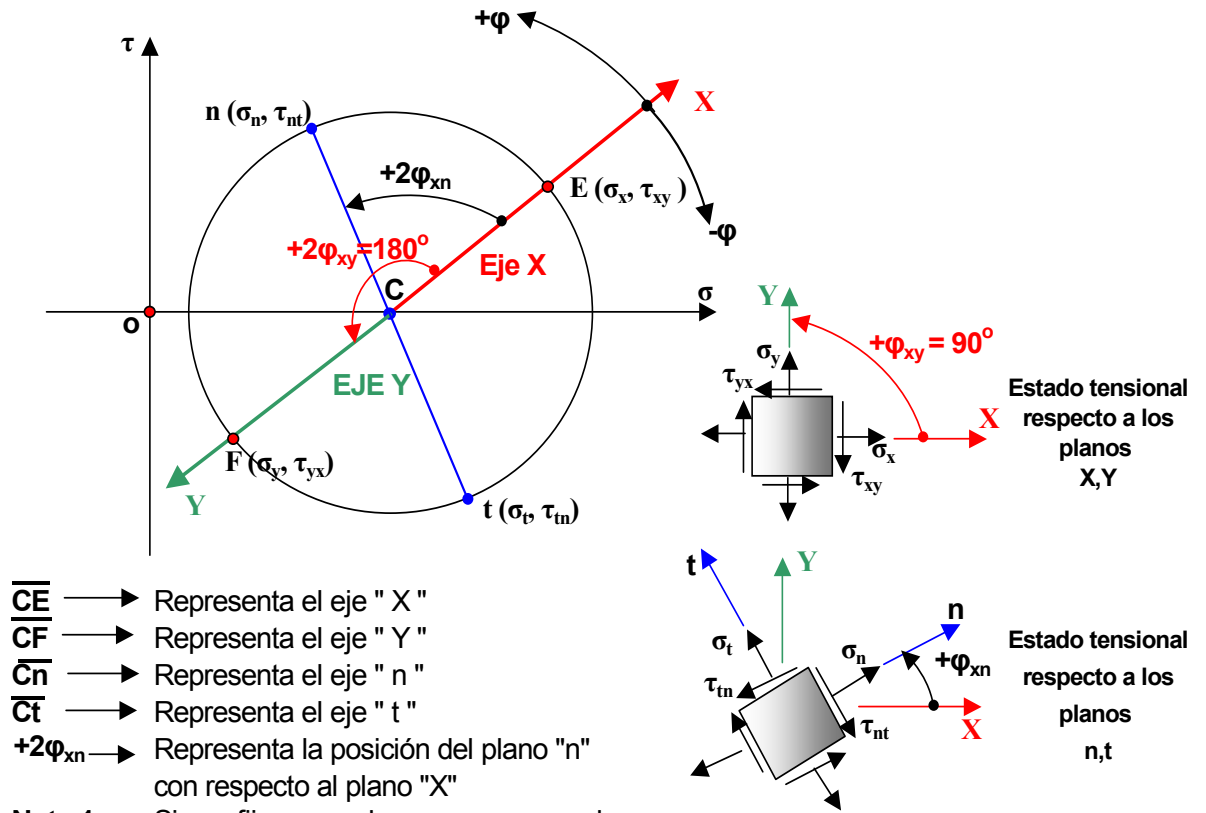
- Positivo (+) En contra de las agujas del reloj φ
- Negativo (-) A favor de las agujas del reloj φ

b) Construcción del círculo

- **Escala .-** Se adopta una escala en cm. de las tensiones y se las transforma para poder representarlas en un plano cartesiano (σ , τ).
- **Ubicación de los planos X y Y** que corresponden a dos puntos del perímetro del círculo equidistantes a 180°
 - Plano X \longrightarrow E (σ_x , τ_{xy})
 - Plano Y \longrightarrow F (σ_y , τ_{yx})
- **Ubicación del centro del círculo.-** Se une mediante una recta los puntos E y F donde corta esta recta el eje de las tensiones normales (σ), es el centro del círculo (C)
- **Trazado del círculo.-** Conociendo la ubicación del centro (C) y sabiendo que las rectas CE y CF son radios del círculo, ya estamos en condiciones de proceder a trazarlo.



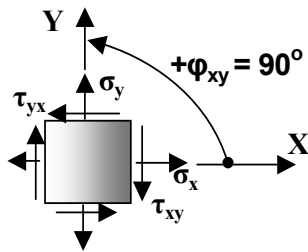
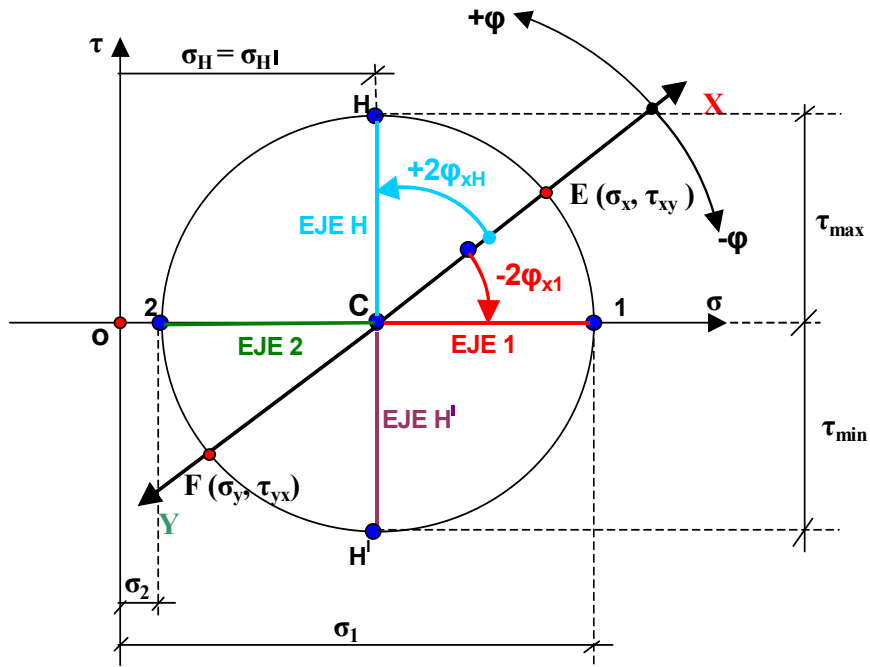
- **Representación de los elementos del círculo.-** Una vez hemos aprendido a construir el círculo, es necesario conocer que representa cada uno de los elementos que componen el círculo los cuales detallaremos a continuación.



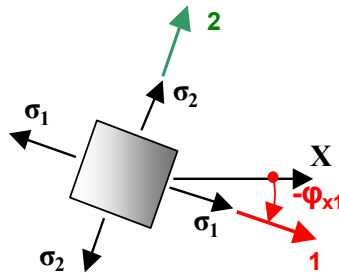
- \overline{CE} → Representa el eje " X "
- \overline{CF} → Representa el eje " Y "
- \overline{Cn} → Representa el eje " n "
- \overline{Ct} → Representa el eje " t "
- $+2\phi_{xn}$ → Representa la posición del plano " n " con respecto al plano " X "

- Nota 1** → Si nos fijamos en los esquemas en el círculo los ángulos varían en 2ϕ y en los elementos diferenciales varían en ϕ
- Nota 2** → Los planos " Y " y " t " también se los denomina planos complementarios de los de los planos " X " y " n " respectivamente porque quedan ubicados a 90° de los mismos.
- Nota 3** → Cada punto del perímetro del círculo representa un estado de tensiones ligado a un plano diferente. Por ejemplo el punto **n** representa el estado de tensiones ligado al **plano n-n** cuya normal forma un ángulo ϕ_{xn} con el eje X

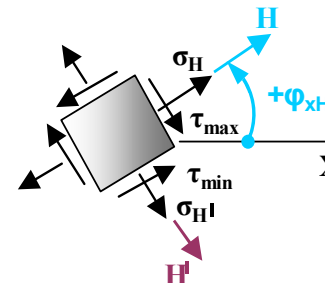
Estados Tensionales Máximos y Mínimos



Estado tensional respecto a los planos X, Y



Estado tensional Principal respecto a los planos 1, 2



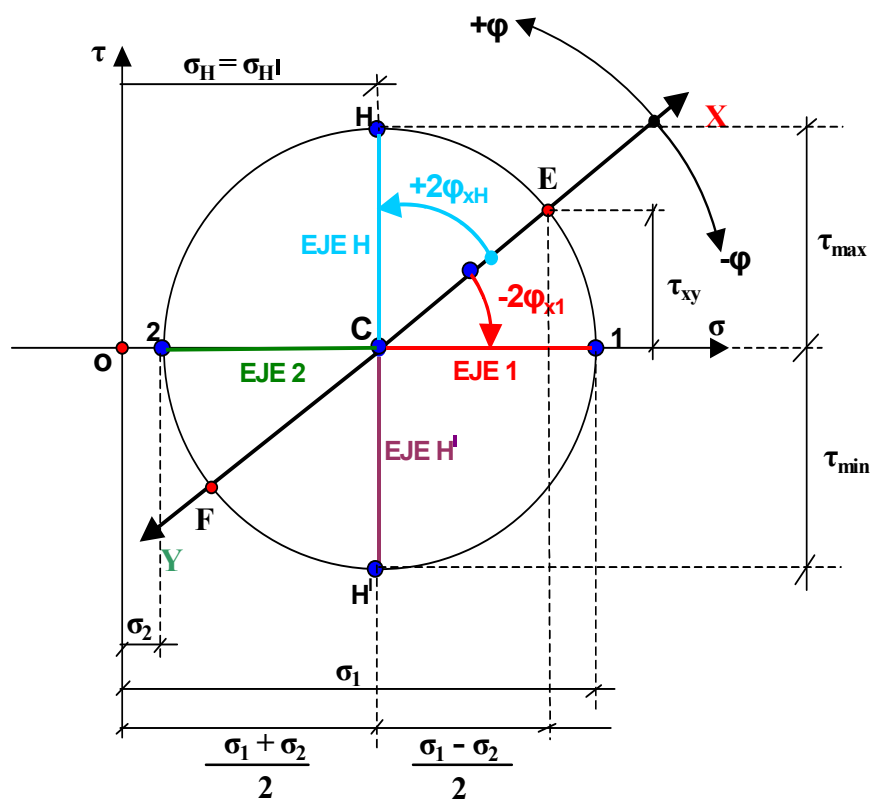
Estado tensional de Corte maximo y minimo respecto a los planos H, H'

- C1 Representa el eje principal "1" donde se produce el esfuerzo principal "1" o esfuerzo normal máximo.
- C2 Representa el eje principal "2" donde se produce el esfuerzo principal "2" o esfuerzo normal mínimo.
- φx1 Representa el ángulo que forma el eje "x" con el eje "1"
- CH Representa el eje "H" donde se produce el esfuerzo de corte máximo.

- CH** Representa el eje “H” donde se produce el esfuerzo de corte mínimo
- φ_{XH}** Representa el ángulo que forma el eje “x” con el eje “H”.

8.5 Formulación de los estados máximos y mínimos de esfuerzos normales y cortantes

Partiendo del conocimiento que nos proporciona el círculo de Mohr podemos plantear fácilmente las ecuaciones que gobiernan los esfuerzos máximos y mínimos.



8.5.1 Esfuerzos Principales o Esfuerzos normales máximos y mínimos

- Esfuerzo principal “1” o Esfuerzo normal máximo

$$\sigma_1 = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}$$

- Esfuerzo principal “2” o Esfuerzo normal mínimo

$$\sigma_2 = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} - \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}$$

- Angulo que forma el eje “X” con el eje “1”

$$\tan 2\varphi_{x-1} = - \frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y}$$

8.5.2 Esfuerzo de corte máximo y mínimo (Ejes H y H^l)

- Esfuerzo de corte máximo

$$\tau_{\max} = + \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}$$

- Esfuerzo de corte mínimo

$$\tau_{\min} = - \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}$$

- Angulo que forma el eje “X” con el eje “H”

$$\varphi_{X-H} = \varphi_{x-1} - 45^\circ$$

- Esfuerzos normales

$$\sigma_H = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2}$$

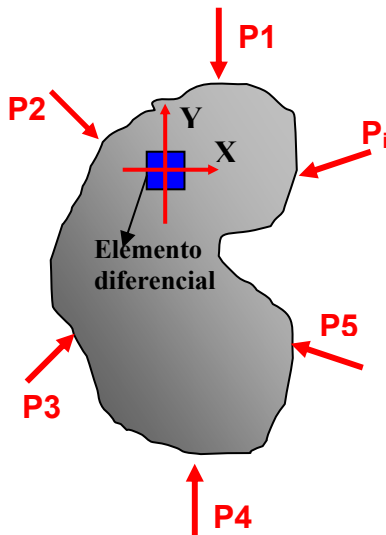
$$\sigma_{H^l} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2}$$

8.6 Ejemplos

8.6.1 Ejemplo N° 1

Pregunta

Mediante un análisis previo se determino el estado tensional respecto a los ejes (X, Y) correspondientes al elemento diferencial marcado en la pieza de la figura, dando como resultado los siguientes valores:



DATOS

$$\sigma_x = 1000.00 \text{ kg/cm}^2$$

$$\sigma_y = -1500.00 \text{ kg/cm}^2$$

$$\tau_{xy} = -500.00 \text{ kg/cm}^2$$

$$\tau_{yx} = 500.00 \text{ kg/cm}^2$$

- A. Para el elemento diferencial, Dibujar el estado tensional respecto a los ejes (X, Y).
- B. Mediante el método gráfico numérico del círculo de Mohr determinar para el elemento diferencial lo siguiente:
 - B.1 Estado Tensional Principal, Dibujar el elemento diferencial mostrando el estado tensional en sus caras.
 - B.2 Estado Tensional Para Corte Máximo y Mínimo, Dibujar el elemento diferencial mostrando el estado tensional en sus caras.
 - B.3 Estado tensional para plano $\phi_{x-1} = -110^\circ$ y su plano complementario, Dibujar elemento diferencial mostrando el estado tensional en su cara.
- C. Mediante el Metodo analítico comprueba los resultados del inciso “ B”